Министарство просвете, науке и технолошког развоја
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА

Решења задатака

Први разред – А категорија

1. а) Пошто је n дељив са три, следи да је његов збир цифара дељив са три, те је онда и $f(n)$ дељив са 3 јер има исти збир цифара. Одатле, из $n = 3f(n)$ следи да је број n дељив са 9 те је и његов збир цифара дељив са 9, и најзад, пошто је и $f(n)$ дељив са 9 јер има исти збир цифара, из $n = 3f(n)$ следи да је n дељив са 27.

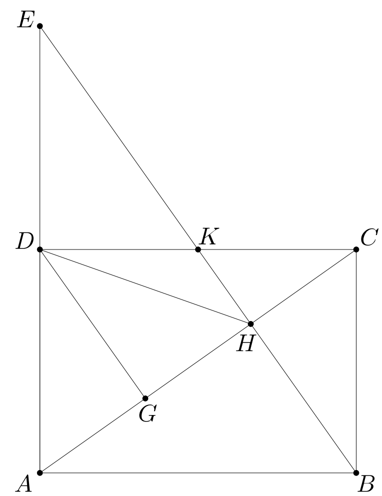
b) Уколико запишемо $n = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$, једнакост $n = 2f(n)$ се своди на

$$10^k a_k + \dots + 10a_1 + a_0 = 2(10^k a_0 + \dots + 10a_{k-1} + a_k).$$

Из констатације $10^i \equiv 1^i = 1 \pmod 9$ следи $a_k + \dots + a_1 + a_0 \equiv 2(a_0 + \dots + a_{k-1} + a_k) \pmod 9$, тј. $a_0 + \dots + a_{k-1} + a_k \equiv 0 \pmod 9$. Дакле, како је збир цифара броја n дељив са 9, следи да је и n дељив са 9.

2. а) Нека права BK сече продужетак странице AD у тачки E. Како су $\triangle BCK$ и $\triangle EDK$ правоугли, K је средиште странице CD и код K имамо унакрсне углове, добијамо $\triangle BCK \cong \triangle EDK$. Одатле имамо $ED = BC = AD$, па како је $\triangle AHE$ правоугли (по услову задатка важи $BK \perp AC$), то је D средиште хипотенузе, па имамо $AD = ED = HD$, тј. $\triangle HAD$ је једнакокраки, одакле следи $\measuredangle DAH = \measuredangle DHA$. Сада из једнакости $\measuredangle DAH = \measuredangle ACB$ (углови са паралелним крацима) добијамо тражену једнакост $\measuredangle ACB = \measuredangle DHA$.

b) Очигледно, $\triangle GAD \cong \triangle HCB$ (имају подударна сва три одговарајућа угла, и $AD = CB$). Одатле следи $AG = CH$, а како су праве DG и EH паралелне и $AD = DE$, из Талесове теореме следи $AG = GH$. Коначно, из $AG = GH = HC$ следи $GH = \frac{1}{3}AC$.



Оп 2018 1А 2

3. Нађимо прво на колико се начина могу одабрати тражени одбори ако изоставимо захтев да сваки одбор мора имати бар два члана. Свака два математичара који су међусобно у свађи можемо на укупно $3 \cdot 2 = 6$ начина распоредити у три одбора (првог математичара ставимо у било који одбор, а за другог бирамо један од преостала два), те је укупан број начина 6^n. Од овог броја треба одузети одабире у којима је број чланова у неком одбору 0 или 1. Приметимо, пре свега, да може постојати највише један такав одбор (ако би два одбора била таква, у трећем бисмо имали бар $2n - 2$ чланова комисије, а пошто за $n \geqslant 3$ важи $2n - 2 > n$, неки од чланова у том одбору би били међусобно у свађи). Број одабира где је неки одбор без чланова износи $3 \cdot 2^n$ (најпре фиксирамо који од 3 одбора ће бити без чланова, а онда сваки пар математичара у свађи можемо у преостала два одбора распоредити на 2 начина). Број одабира где неки одбор има само једног члана износи $2n \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} = 3n \cdot 2^{n+1}$ (усамљени математичар се може изабрати на $2n$ начина, сместити у један од 3 одбора, особа са којом је у свађи у било који од преостала 2 одбора, а онда се преосталих $2n - 2$ математичара може сместити на 2^{n-1} начина). Следи да је решење задатка број $6^n - 3 \cdot 2^n - 3n \cdot 2^{n+1} = 6^n - 3 \cdot 2^n(2n + 1)$.

4. Нека је t број секунди протеклих од поноћи, при чему је t ненегативан реалан број. Углови које су за то време прешле секундна, минутна и сатна казаљка, редом, износе $6t$, $\frac{t}{10}$ и $\frac{t}{120}$ (изражени у степенима). Услов да секундна и минутна казаљка заклапају угао од 30° је $6t - \frac{t}{10} = \pm 30 + 360a$, што је еквивалентно са

$$t = \frac{300(\pm 1 + 12a)}{59};$$

услов да секундна и сатна казаљка заклапају угао од 30° је $6t - \frac{t}{120} = \pm 30 + 360b$, што је еквивалентно са

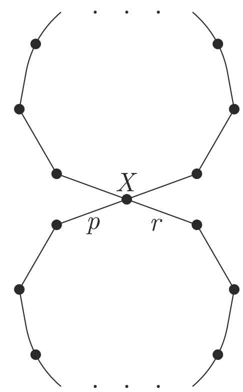
$$t = \frac{3600(\pm 1 + 12b)}{719};$$

услов да минутна и сатна казаљка заклапају угао од 30° је $\frac{t}{10} - \frac{t}{120} = \pm 30 + 360c$, што је еквивалентно са

$$t = \frac{3600(\pm 1 + 12c)}{11}$$

(где су a, b и c неки цели бројеви). По услову задатка, две од ове три једнакости морају да важе. Како су бројеви 11, 59 и 719 узајамно прости по паровима, следи да t мора бити цео број (наиме, именилац броја t мора делити нека два од ова три броја, па следи да именилац мора бити 1). Како важи једна од последње 2 једнакости, а број 3600 је узајамно прост и са 11 и са 719, следи да је t дељив са 3600. Другим речима, услови задатка се могу испунити само кад је прошао целобројан број сати, што значи да и секундна и минутна казаљка тада показују на број 12. Тада, да би се испунио услов задатка, сатна казаљка мора показивати на број 1 или 11. Следи да ће у току двадесетчетворочасовног периода 4 пута бити задовољени услови задатка: у 1.00, 11.00, 13.00 и 23.00.

5. Барон Минхаузен није у праву: из установљене чињенице не следи његов закључак. Као контрапример можемо узети ситуацију у којој из једног града полазе четири пута, а из сваког од преосталих 2017 градова по два пута, на начин који је приказан на слици. Очигледно, у таквој ситуацији јесте испуњена чињеница коју је барон установио. Одаберимо сада за p и r два пута означена на слици. Јасно, да бисмо из „горње половине“ прешли у „доњу“ (или обратно), морамо проћи путем p или r. Међутим, уколико бисмо њима пролазили непосредно једним за другим, очигледно бисмо прво ишли (једним од њих) у смеру ка граду X, а потом (другим од њих) у смеру од града X. Ово значи да смо путовање започели у доњој половини (будући да би евентуални претходни прелазак из горње половине у доњу подразумевао пролазак путем p или r у смеру од града X), но онда, после проласка путевима p и r на описани начин, не постоји више начин да дођемо до горње половине уз поштовање описаних услова путовања. Тиме је задатак решен.



Оп 2018 1А 5

Други разред – А категорија

1. Из $\sin 2x \leqslant 1$ имамо $17 - 7\sin 2x > 0$ за све вредности x, па је корен с леве стране увек дефинисан. Дакле, пре квадрирања једначине треба поставити само услов $3\cos x - 5\sin x > 0$. Након квадрирања остаје $17 - 7\sin 2x = 9\cos^2 x + 25\sin^2 x - 30\sin x\cos x$, тј., замењујући $17 = 17\sin^2 x + 17\cos^2 x$ и пребацујући све на леву страну,

$$8\cos^2 x - 8\sin^2 x + 30\sin x\cos x - 7\sin 2x = 0.$$

Из идентитета $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ и $2\sin x\cos x = \sin 2x$ видимо да је добијена једначина еквивалентна са $8\cos 2x + 8\sin 2x = 0$. Ово даље можемо трансформисати као

$$0 = 8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right) = 8\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x\right) = 8\sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right),$$

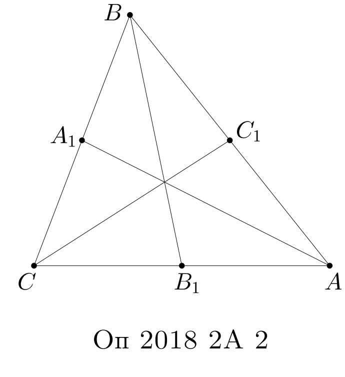
одакле следи $2x + \frac{\pi}{4} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Дакле, решења последње једначине су бројеви облика $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Они се могу поделити у четири класе (где у свакој класи имамо период 2π): $x = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi$, $x = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi$, $x = \frac{7\pi}{8} + 2k\pi$, $x = \frac{11\pi}{8} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Решења из друге и треће класе не испуњавају услов $3\cos x - 5\sin x > 0$ (имамо $\cos\frac{3\pi}{8} < \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\frac{3\pi}{8} > \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, па $3\cos\frac{3\pi}{8} - 5\sin\frac{3\pi}{8} < -\sqrt{2} < 0$; такође, $\cos\frac{7\pi}{8} < 0$ и $\sin\frac{7\pi}{8} > 0$, па $3\cos\frac{7\pi}{8} - 5\sin\frac{7\pi}{8} < 0$). Решења из прве и четврте класе испуњавају тај услов ($\cos(-\frac{\pi}{8}) > 0$ и $\sin(-\frac{\pi}{8}) < 0$, па $3\cos(-\frac{\pi}{8}) - 5\sin(-\frac{\pi}{8}) > 0$; такође, $\cos\frac{11\pi}{8} > \cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\frac{11\pi}{8} < \sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, па $3\cos\frac{11\pi}{8} - 5\sin\frac{11\pi}{8} > \sqrt{2} > 0$), па само она чине решења полазне једначине. Другим речима, одговор је:

$$x \in \left\{-\frac{\pi}{8} + 2k\pi, \frac{11\pi}{8} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. У оба дела задатка користићемо формулу

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

(и аналогно за остале тежишне дужи). Покажимо како се она изводи. Ако је A_1 средина странице BC, из косинусне теореме примењене на $\triangle AA_1B$ имамо $c^2 = t_a^2 + BA_1^2 - 2t_aBA_1\cos\measuredangle AA_1B$, а из косинусне теореме примењене на $\triangle AA_1C$ добијамо $b^2 = t_a^2 + CA_1^2 - 2t_aCA_1\cos\measuredangle AA_1C$. Сабирањем ове две једнакости, уз примену $BA_1 = CA_1 = \frac{a}{2}$ и $\cos\measuredangle AA_1B = -\cos\measuredangle AA_1C$ (будући да су ова два угла напоредна), добијамо $b^2 + c^2 = 2t_a^2 + \frac{a^2}{2}$, одакле следи жељена формула.



Оп 2018 2А 2

а) Претпоставимо $a^2 + c^2 = 2b^2$. Тада имамо

$$t_a^2 + t_c^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} + \frac{2b^2 + 2a^2 - c^2}{4} = \frac{4b^2 + a^2 + c^2}{4} = \frac{6b^2}{4} = \frac{3b^2}{2}$$

и

$$2t_b^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{2} = \frac{4b^2-b^2}{2} = \frac{3b^2}{2},$$

тј. заиста важи $t_a^2 + t_c^2 = 2t_b^2$.

Обратно, уколико претпоставимо $t_a^2 + t_c^2 = 2t_b^2$, ово се своди на

$$\frac{4b^2+a^2+c^2}{4} = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{2},$$

одакле (после множења обе стране са 4 и потирања) следи $6b^2 = 3a^2 + 3c^2$, тј. $a^2 + c^2 = 2b^2$.

b) Претпоставимо $a^2 + c^2 = 2b^2$. Тада имамо

$$\frac{t_a^2}{t_b^2} = \frac{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}}{\frac{2a^2+2c^2-b^2}{4}} = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{2a^2+2c^2-b^2} = \frac{(a^2+c^2)+2c^2-a^2}{2(2b^2)-b^2} = \frac{3c^2}{3b^2} = \frac{c^2}{b^2},$$

тј. $\frac{t_a}{t_b} = \frac{c}{b}$. Аналогно, $\frac{t_c}{t_b} = \frac{a}{b}$. Дакле, пошто посматрана два троугла имају два пара пропорционалних страница, следи да су они слични.

Обратно, уколико претпоставимо да су та два троугла слична, тада имамо $\frac{t_a}{t_c} = \frac{c}{a}$ (приметимо, из $a \leqslant b \leqslant c$ следи $t_a \geqslant t_b \geqslant t_c$, одакле закључујемо која страница кореспондира којој), тј. $at_a = ct_c$. Ово се даље своди на $a\sqrt{2b^2+2c^2-a^2} = c\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$, тј. $2a^2b^2 + 2a^2c^2 - a^4 = 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4$. Пребацивањем свега на десну страну једнакости добијамо

$$0 = a^4 - c^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 = (a^2-c^2)(a^2+c^2) + 2b^2(c^2-a^2) = (a^2-c^2)(a^2+c^2-2b^2).$$

Одавде следи $a = c$ или $a^2 + c^2 = 2b^2$. У другом случају задатак је решен. У првом случају, из $a = c$ и $a \leqslant b \leqslant c$ имамо $a = b = c$, па тада опет важи $a^2 + c^2 = 2b^2$. Тиме је доказ завршен.

3. Посматрани бројеви су облика $\frac{10^{2k}-1}{99}$ за неки природан број k. За $k = 1$ имамо број 1, што није прост број. За $k = 2$ имамо број 101, што јесте прост број. За $k \geqslant 3$ имамо

$$\frac{10^{2k}-1}{99} = \frac{(10^k-1)(10^k+1)}{99} = \frac{\frac{10^k-1}{9}(10^k+1)}{11}.$$

Један од два чиниоца у бројиоцу мора бити дељив са 11 (јер је посматрани број природан). Ако $11 \mid 10^k + 1$, тада је $\frac{10^k-1}{9}$ фактор посматраног броја (већи од 1 и различит од самог броја), па је посматрани број сложен; ако $11 \mid \frac{10^k-1}{9}$, тада је $\frac{10^k-1}{99}$ фактор посматраног броја (већи од 1 и различит од самог броја), па је посматрани број поново сложен.

Дакле, једино решење је број 101.

4. Сабирањем свих n једначина добијамо

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i + n\right),$$

што се своди на $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$. Претпоставимо, без смањења општости, да је x_1 минималан међу $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тада имамо $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$. Међутим, прва једначина даје $x_2 = x_1^2 - (x_n - 1)^2 \leqslant x_1^2 \leqslant x_1$, па због минималности x_1 мора бити $x_2 = x_1 = x_1^2$ и $x_n = 1$. Одатле следи $x_1 = 0$ или $x_1 = 1$. У првом случају на исти начин добијамо $x_3 = x_2 = 0$, $x_4 = x_3 = 0$ итд., тј. $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$, што није решење. Остаје само случај $x_1 = 1$ и одатле опет на исти начин добијамо $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, па је то једино решење.

5. Јединичних квадрата има n^2, сваки има бар две црвене странице, што значи да парова облика

(јединични квадрат, његова црвена страница)

има бар $2n^2$. Међутим, свака црвена дуж се појављује у највише два таква пара, па црвених дужи има бар n^2.

Претпоставимо да их има тачно n^2. Тада свака од њих лежи у тачно два јединична квадрата, а сваки јединични квадрат има тачно две црвене дужи (јер би у супротном у некој од процена из претходног пасуса важила строга неједнакост, па би број црвених дужи морао бити строго већи од n^2). Обојимо јединичне квадрате црно и бело, попут шаховске табле. Свака црвена дуж је у тачно једном белом квадрату (и једном црном), а пошто сваки бели квадрат има две црвене странице, следи да белих квадрата има $\frac{1}{2}n^2$, што није цео број; контрадикција.

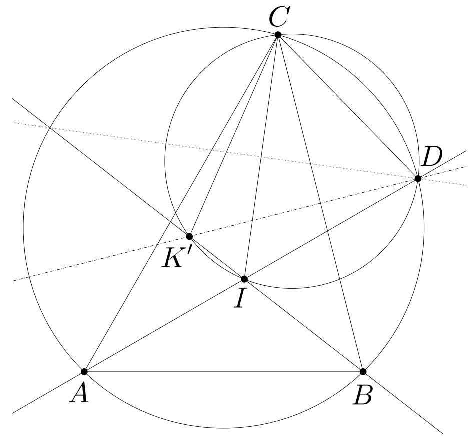
Дакле, црвених дужи има бар $n^2 + 1$. Покажимо да је могуће достићи ову вредност. Довољно је обојити све хоризонталне дужи осим оних које су на страницама великог квадрата, а вертикалне јединичне дужи које належу на две хоризонталне странице великог квадрата обојити наизменично (прву, трећу, пету...). Овако је обојено $n(n-1) + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} = n^2 + 1$ дужи, чиме је доказ завршен.

Трећи разред – А категорија

1. Ако x и y замене места, добијамо $f(f(xy)) = |y|f(x) + 3f(xy)$, што одузимањем од полазне једначине даје $|x|f(y) = |y|f(x)$. За $y = 1$ имамо $f(x) = f(1)|x|$. Затим за $x = y = 1$ у полазној једначини добијамо $f(f(1)) = 4f(1)$, а пошто из формуле из претходне реченице следи $f(f(1)) = f(1)|f(1)|$, спајањем последње две једнакости добијамо $f(1)|f(1)| = 4f(1)$, тј. $f(1)(|f(1)| - 4) = 0$. Одатле следи $f(1) \in \{-4, 0, 4\}$, тј. кандидати за решења су функције $f(x) \equiv 0$, $f(x) = 4|x|$ и $f(x) = -4|x|$. Прва од њих очигледно јесте решење, видимо и да друга јесте решење јер важи $|x|f(y) + 3f(xy) = 4|xy| + 12|xy| = 16|xy| = f(f(xy))$, а слично и $f(x) = -4|x|$ јесте решење.

2. Познато је да важи $DC = DI$. Заиста, ако углове троугла означимо уобичајено са α, β и γ, имамо $\measuredangle ICD = \measuredangle ICB + \measuredangle BCD = \measuredangle ICB + \measuredangle BAD = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} = \measuredangle ICA + \measuredangle IAC = \measuredangle DIC$, тј. $DI = DC$.

Нека BI сече симетралу странице BC у тачки K'. Доказаћемо $K' \equiv K$, што је довољно за решење задатка јер по избору тачке K' важи $BK' = CK'$. Како имамо $\measuredangle IK'D = \measuredangle BK'D = \measuredangle CK'D$, тачка D је пресек симетрале $\measuredangle IK'C$ и симетрале дужи IC (подсетимо се, $DI = DC$), а познато је да тај пресек лежи на кружници описаној око $\triangle IK'C$. Дакле, тачке I, K', C и D су концикличне; одатле, K' лежи на кружници описаној око $\triangle CDI$, па следи $K' \equiv K$.



Оп 2018 3А 2

3. Нека су дужине странице тог троугла a, b и c, а његова површина P. Можемо претпоставити, без умањења општости, $a \leqslant b \leqslant c$. Тада је b аритметичка средина a и c, па из $b = \frac{a+c}{2}$ добијамо $c = 2b - a$. Сада из $a + P = b + c$ добијамо $P = b + c - a = b + (2b - a) - a = 3b - 2a$. Изразићемо површину троугла помоћу Хероновe формуле. Имамо $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2}$, $s - a = \frac{3b}{2} - a$, $s - b = \frac{b}{2}$ и $s - c = a - \frac{b}{2}$, па следи

$$3b - 2a = P = \sqrt{\frac{3b}{2}\left(\frac{3b}{2} - a\right)\frac{b}{2}\left(a - \frac{b}{2}\right)} = \frac{b}{4}\sqrt{3(3b-2a)(2a-b)}.$$

Квадрирањем обе стране добијамо $16(3b-2a)^2 = 3b^2(3b-2a)(2a-b)$, што се своди на $16(3b-2a) = 3b^2(2a-b)$ (можемо скратити са $3b - 2a$ јер из $b \geqslant a$ следи $3b - 2a > 0$), тј. $48b - 32a = 6ab^2 - 3b^3$. Уочавамо да је $3b^3$ паран број (јер су сви остали сабирци парни), па следи да је и b паран број, тј. $b = 2b'$. Последња једнакост се своди на $96b' - 32a = 24ab'^2 - 24b'^3$, тј., после дељења са 8, $12b' - 4a = 3ab'^2 - 3b'^3$. Одавде можемо изразити

$$a = \frac{3b'^3 + 12b'}{3b'^2 + 4} = \frac{3b'^3 + 4b' + 8b'}{3b'^2 + 4} = b' + \frac{8b'}{3b'^2 + 4}.$$

Како је a цео број, добијамо $3b'^2 + 4 \mid 8b'$, а одатле $3b'^2 + 4 \leqslant 8b'$. Једнакост се достиже за $b' = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 3\cdot 4}}{6} = \frac{8\pm 4}{6}$, тј. за $b' = \frac{2}{3}$ и $b' = 2$, па посматрана неједнакост важи за $b' \in [\frac{2}{3}, 2]$. Једини природни бројеви у овом интервалу су $b' = 1$ и $b' = 2$. За $b' = 1$ имамо $a = 1 + \frac{8}{7}$, што није природан број, па се овде не добија решење. За $b' = 2$ имамо $a = 2 + \frac{16}{3\cdot 4+4} = 2 + 1 = 3$, $b = 2b' = 4$, $c = 2b - a = 2\cdot 4 - 3 = 5$ и $P = 3b - 2a = 3\cdot 4 - 2\cdot 3 = 6$, што је јединствено решење задатка.

4. Прво покажимо да је могуће обићи таблу у $n(2n+1) + 2n = 2n^2 + 3n$ потеза. Овај број потеза се може постићи ако паук дуж сваке колоне иде вертикално два поља све док је не обиђе целу, онда се помери хоризонтално једно поље до следеће колоне и понавља поступак до краја табле. Сада покажимо да је ово најмањи могућ број потеза. Обојимо сва поља у непарним врстама у црно. Видимо да у сваком потезу скуп новообиђених поља може садржати највише једно црно поље. Укупан број необиђених црних поља на почетку (дакле, сва црна поља осим почетног) једнак је $(n+1)(2n+1) - 1 = 2n^2 + 3n$, те следи да је управо толико минимално потеза потребно пауку да обиђе сва поља.

5. а) Познато је да тројка (a, b, c) чини примитивну Питагорину тројку ако и само ако постоје узајамно прости природни бројеви m и n различите парности такви да важи $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ и $c = m^2 + n^2$ (уз могуће замењене улоге за a и b). Одатле, један од бројева a и b је паран а други непаран, па се они завршавају различитим цифрама. Дакле, под претпоставком да се a, b и c могу записати користећи само две различите цифре, следи да се c мора завршавати истом цифром као један од бројева a или b. Сада из $a^2 + b^2 = c^2$ следи да се неки од бројева a^2, b^2 или c^2 мора завршавати цифром 0, па се одатле и један од бројева a, b или c завршава цифром 0, тј. 0 је једна од две цифре које се (по претпоставци) користе у запису ова три броја. Кад би друга цифра била x, $x > 1$, следило би да су сва три броја дељива са x, те да нису узајамно проста; дакле, те две цифре морају бити 0 и 1.

То значи да можемо записати $a = \sum_{i=1}^{n_1} 10^{a_i}$, $b = \sum_{i=1}^{n_2} 10^{b_i}$ и $c = \sum_{i=1}^{n_3} 10^{c_i}$, где су a_i, b_i и c_i ненегативни цели бројеви, индексирани у растућем поретку. Тада имамо $a^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n_1} 10^{a_i + a_j}$ и аналогно за b^2 и c^2. Најмањи сабирци у бројевима a^2, b^2 и c^2, редом, јесу 10^{2a_1}, 10^{2b_1} и 10^{2c_1}, те, не умањујући општост, морамо имати $a_1 = c_1$. Докажимо индукцијом да за све i важи $a_i = c_i$ (одатле ће следити $a = c$, контрадикција). Базу смо управо показали.

Претпоставимо сада да за све i, $1 \leqslant i \leqslant k$, важи $a_i = c_i$, и докажимо $a_{k+1} = c_{k+1}$. Из претпоставке следи да се сви сабирци у a^2 облика $10^{a_i+a_j}$ за $i, j \leqslant k$ потиру с одговарајућим сабирцима у c^2. Од преосталих сабирака, најмањи у a^2 је $2 \cdot 10^{a_1+a_{k+1}}$, најмањи у b^2 је 10^{2b_1}, а најмањи у c^2 је $2 \cdot 10^{c_1+c_{k+1}}$. Како се 10^{2b_1} појављује само једном у b^2, он сам не може потрети $2 \cdot 10^{c_1+c_{k+1}}$, па остаје $2 \cdot 10^{a_1+a_{k+1}} = 2 \cdot 10^{c_1+c_{k+1}}$, тј. $a_{k+1} = c_{k+1}$, што је и требало доказати.

b) Поново ћемо користити карактеризацију примитивних Питагориних тројки с почетка дела а). У тој карактеризацији узмимо $n = 5l$ и $m = 5l + 1$. Тада добијамо $a = 10l + 1$, $b = 10l(5l + 1)$ и $c = 10l(5l + 1) + 1$. Следи да је довољно наћи l такво да се и l и $l(5l + 1)$ могу исписати цифрама $\{0, 1, 5\}$. Ако узмемо $l = 10^s$ за произвољно $s \in \mathbb{N}$, тада имамо $5l + 1 = 5 \cdot 10^s + 1$, па следи $l(5l + 1) = 5 \cdot 10^{2s} + 10^s$, те се за бесконачно много s може направити жељена Питагорина тројка.

Напомена. Још неки примери примитивних Питагориних тројки које се састоје само од три различите цифре су $(2\underbrace{00\ldots00}_{k-1}1,\ 2\underbrace{00\ldots00}_{k-1}2\underbrace{00\ldots00}_{k},\ 2\underbrace{00\ldots00}_{k-1}2\underbrace{00\ldots00}_{k-1}1)$ и $(\underbrace{33\ldots33}_{k},\ \underbrace{55\ldots55}_{k-1}\underbrace{44\ldots44}_{k},\ \underbrace{55\ldots55}_{k-1}\underbrace{44\ldots44}_{k-1}5)$ за ма које $k \in \mathbb{N}$.

Четврти разред – А категорија

1. *Прво решење.* Пре свега, имамо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin kx}{\cos kx}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{kx} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{k}{\cos kx} = 1 \cdot k = k.$$

Даље, имамо и $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, па добијамо да за $k > 1$ важи $\lim_{x\to 0} (\frac{\operatorname{tg} kx}{x})^{\frac{1}{x^2}} = \infty$, а за $0 \leqslant k < 1$ важи $\lim_{x\to 0} (\frac{\operatorname{tg} kx}{x})^{\frac{1}{x^2}} = 0$. Преостаје случај $k = 1$. Тада посматрани израз трансформишемо на следећи начин:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x - x}{x} \cdot \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \left(\left(1 + \frac{\operatorname{tg} x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - x}}\right)^{\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}}.$$

Приметимо да за $x \to 0$ имамо $\frac{\operatorname{tg} x - x}{x} \to 0$ (због виђеног $\frac{\operatorname{tg} x}{x} \to 1$), па је израз у спољним заградама облика $(1 + t)^{\frac{1}{t}}$ за $t \to 0$, и његов лимес је e. Према томе, даље можемо рачунати:

$$\lim_{x\to 0} \left(\left(1 + \frac{\operatorname{tg} x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - x}}\right)^{\frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}} = \left(\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} x - x}{x}\right)^{\frac{x}{\operatorname{tg} x - x}}\right)^{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}},$$

па преостаје још израчунати $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$. Примењујући Лопиталово правило (два пута), добијамо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\cos^{-3} x \cdot (-\sin x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos^{-3} x}{6} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{6} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

Дакле, решење задатка је:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} kx}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \begin{cases} 0, & \text{за } 0 \leqslant k < 1; \\ e^{\frac{1}{3}}, & \text{за } k = 1; \\ \infty, & \text{за } k > 1. \end{cases}$$

Друго решење. Радимо само случај $k = 1$ (остатак иде као у претходном решењу). Можемо записати

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \left(e^{\ln \frac{\operatorname{tg} x}{x}}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln \frac{\operatorname{tg} x}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\operatorname{tg} x}{x}},$$

па је довољно израчунати $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. Ово спроводимо на следећи начин (примењујемо Лопиталово правило свугде где је назначено $\overset{\text{Л. п.}}{=}$):

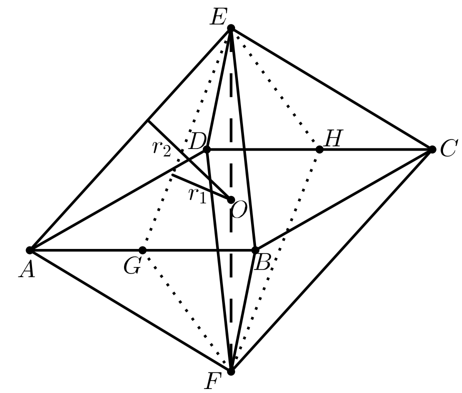
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{\operatorname{tg} x}{x}}{x^2} \overset{\text{Л. п.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos^2 x} x - \operatorname{tg} x}{x^2}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{2x^2 \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{2x^2 \frac{\sin x}{\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x \cos x}{2x^2 \sin x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{1}{2}\sin 2x}{x^2 \sin 2x}$$

$$\overset{\text{Л. п.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x} \overset{\text{Л. п.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\sin 2x}{2\sin 2x + 4x\cos 2x + 4x \cos 2x - 4x^2 \sin 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 2x + 4x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x} \overset{\text{Л. п.}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x}{2\cos 2x + 4\cos 2x - 8x \sin 2x - 4x \sin 2x - 4x^2 \cos 2x} = \frac{2}{2+4} = \frac{1}{3},$$

па добијамо исти резултат као у претходном решењу.

2. Нека су G и H средишта страница AB и CD, и O центар квадрата $ABCD$. Нека су r_1 и r_2 полупречници две лопте. Тада су r_1 и r_2, респективно, полупречници кружница уписаних у четвороуглове $FGEH$ и $FAEC$. Обележимо $OG = a$, $OA = a' = a\sqrt{2}$, $OE = b$ и $OF = b'$. Заједнички центар S две посматране лопте се налази на дужи EF, и притом је GS симетрала $\measuredangle EGF$, а AS симетрала $\measuredangle EAF$ (јер је S уједно центар кружница уписаних у $FGEH$ и $FAEC$). Одатле следи $\frac{EG}{FG} = \frac{ES}{FS} = \frac{EA}{FA}$, одакле добијамо $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b'^2}} = \frac{\sqrt{a'^2+b^2}}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$, а што се (унакрсним множењем) своди на $\sqrt{a'^2a^2 + a'^2b'^2 + b^2a^2 + b^2b'^2} = \sqrt{a'^2a^2 + a'^2b^2 + b'^2a^2 + b'^2b^2}$, тј. $a'^2b'^2 + b^2a^2 = a'^2b^2 + b'^2a^2$, а ово је еквивалентно са $(a'^2 - a^2)(b'^2 - b^2) = 0$. Како важи $a' \neq a$, из претходне једнакости следи $b' = b$, а одатле добијамо $S \equiv O$. Сада имамо $r_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $r_2 = \frac{a'b}{\sqrt{a'^2+b^2}} = \frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{2a^2+b^2}}$ (што смо добили рачунајући висине из O у $\triangle EOG$ и $\triangle EOA$ с правим углом у темену O). Из услова задатка имамо $\frac{r_2}{r_1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$, тј. $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2a^2+b^2}} = \sqrt{\frac{2+2(\frac{b}{a})^2}{2+(\frac{b}{a})^2}}$, а одавде добијамо $6 + 3(\frac{b}{a})^2 = 4 + 4(\frac{b}{a})^2$, тј. коначно $\frac{EF}{AB} = \frac{b}{a} = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$.



Оп 2018 4А 2

3. Означимо са $A_i(n)$, $i \in \{1,2,3,4\}$, број начина да Перица крене са i-тог спрата, направи n корака и заврши на последњем спрату. Тражени број је $B_n = \sum_{i=1}^{4} A_i(n)$. Директно израчунавамо $B_0 = \sum_{i=1}^{4} A_i(0) = 0+0+0+1 = 1$ и $B_1 = \sum_{i=1}^{4} A_i(1) = 0+0+1+0 = 1$. Даље, јасно је да за свако $n > 1$ важи

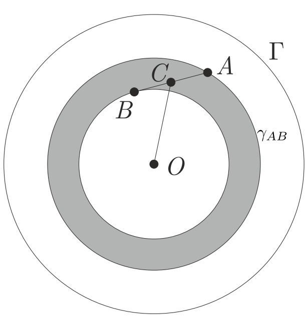
$$\begin{aligned}
A_1(n) &= A_2(n-1),\\
A_2(n) &= A_1(n-1) + A_3(n-1),\\
A_3(n) &= A_2(n-1) + A_4(n-1),\\
A_4(n) &= A_3(n-1),
\end{aligned}$$

па добијамо

$$\begin{aligned}
B_n = \sum_{i=1}^{4} A_i(n) &= A_2(n-1) + (A_1(n-1) + A_3(n-1)) + (A_2(n-1) + A_4(n-1)) + A_3(n-1)\\
&= A_2(n-1) + A_3(n-1) + \sum_{i=1}^{4} A_i(n-1)\\
&= (A_1(n-2) + A_3(n-2)) + (A_2(n-2) + A_4(n-2)) + \sum_{i=1}^{4} A_i(n-1)\\
&= \sum_{i=1}^{4} A_i(n-1) + \sum_{i=1}^{4} A_i(n-2) = B_{n-1} + B_{n-2}.
\end{aligned}$$

Дакле, из $B_0 = 1 = F_1$, $B_1 = 1 = F_2$ и одговарајуће рекурентне везе за Фибоначијеве бројеве, имамо $B_n = F_{n+1}$.

4. Бројеви ap за $-\frac{q-1}{2} \leqslant a \leqslant \frac{q-1}{2}$ дају различите остатке при дељењу са q, па један од њих даје остатак 1: нека је то $ap = bq + 1$. Бројеви $|ap|$ и $|bq|$ су узастопни и мањи од $\frac{1}{2}pq < p^2$ (а тиме и од q^2), па су њихови највећи прости делиоци управо p и q, редом.



Оп 2018 4А 5

5. Нека је AB једна од датих дужи d. При ротацији око центра O круга Γ, дуж AB описује кружни прстен γ_{AB}. Нека је C средина дужи AB и узмимо, без смањења општости, $\measuredangle OCA \geqslant 90°$. Тада имамо $OA^2 - OC^2 \geqslant AC^2 = \frac{1}{4}AB^2$, па је површина прстена γ_{AB} бар $\frac{1}{4}AB^2\pi$.

Ако су дужине датих дужи $d_1, d_2, \ldots, d_n$, из претходног следи да збир површина њима одговарајућих прстена није мањи од $\frac{\pi}{4}(d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2) \geqslant \frac{\pi}{4n}(d_1 + \cdots + d_n)^2 = \pi$ (користили смо неједнакост између квадратне и аритметичке средине), што је површина круга Γ. Према томе, бар два прстена се секу, што значи да постоји кружница с центром O која сече њима кореспондентне две дужи.

Први разред – Б категорија

1. Како су мерни бројеви углова три проста броја, а њихов збир је $180°$, не могу сва три броја бити непарна, па следи да један угао мора износити $2°$. Сада за средњи по величини угао испробавамо просте бројеве, редом, и испитујемо када ће и вредност преосталог угла бити прост број. Налазимо следећа решења: $\{2°, 5°, 173°\}$, $\{2°, 11°, 167°\}$, $\{2°, 29°, 149°\}$, $\{2°, 41°, 137°\}$, $\{2°, 47°, 131°\}$, $\{2°, 71°, 107°\}$ и $\{2°, 89°, 89°\}$.

2. Миљан треба да окрене карте на којима су самогласници: *А*, *Е*, *А*, *И*, *А*, и увери се да је с друге стране паран број. Такође треба да окрене и карту на којој је број *1* и увери се да је с друге стране сугласник (ако би с друге стране био самогласник, та карта би представљала контрапример за Владино тврђење). Дакле, треба да окрене најмање 6 карата.

3. Приметимо да важи $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{12+6+4+3}{12}=\frac{25}{12}\neq\frac{2018}{1301}$. Дакле, посматрани бројеви нису $1,2,3,4$, па имамо $a,b,c,d\geqslant 2$. Но, тада важи

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{30+20+15+12}{60}=\frac{77}{60}=\frac{1925}{1500}<\frac{2013}{1301}.$$

Дакле, такви бројеви a, b, c и d не постоје.

4. Тражени скуп записаћемо као унију четири повезана осенчена дела. Тиме добијамо решење:

$$\Big((A\cap B)\setminus(D\cup E\cup C)\Big)\cup\Big(((A\cap C)\setminus(B\cup F)\Big)\cup\Big((E\cap C)\setminus A\Big)\cup\Big(F\setminus(A\cup B)\Big).$$

5. У речи *МАШТОВИТ* свако слово сем T се јавља тачно једном (T се јавља 2 пута) и представља једну од цифара из скупа $\{1,2,3,4,5,6,7\}$, па је збир цифара броја *МАШТОВИТ* једнак $1+2+3+4+5+6+7+T=28+T$. Даље, како је број *МАШТОВИТ* непаран, T мора бити непарна цифра, а како је број *МАШТОВИТ* дељив са 3, и његов збир цифара $28+T$ мора бити дељив са 3, па следи $T=5$.

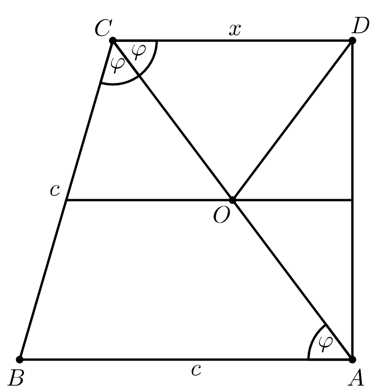
Сви сугласници представљају цифре исте парности, па добијамо да су и $М$, $Ш$ и $В$ непарне цифре (јер је $T=5$ непарна цифра), тј. $М,Ш,В\in\{1,3,7\}$, а како смо утрошили све непарне цифре, онда самогласници представљају парне цифре, тј. $А,О,И\in\{2,4,6\}$. Како различита слова представљају различите цифре, то $М,Ш,В$ можемо одредити из скупа $\{1,3,7\}$ на $3!=6$ начина, као и $А,О,И$ из скупа $\{2,4,6\}$ такође на $3!=6$ начина, па укупно таквих бројева има $6\cdot 6=36$.

Други разред – Б категорија

1. Из другог услова следи да је X подскуп скупа $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Из првог услова следи да он мора садржати бројеве 6, 7 и 8, као и да не сме садржати бројеве 9 и 10. Из другог услова следи да он мора садржати бројеве 1, 2 и 3. Дакле, преостају још бројеви 4 и 5, за које можемо произвољно одабрати да ли да буду или да не буду у скупу X. Према томе, постоје четири таква скупа: $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $\{1,2,3,5,6,7,8\}$, $\{1,2,3,4,6,7,8\}$ и $\{1,2,3,6,7,8\}$.

2. Дељењем задата два полинома добијамо количник $x+a$ и остатак $2x(b-a^2)+(c-ab)$. Како остатак мора бити 0 (јер је први полином дељив другим), следи $b-a^2=0$ и $c-ab=0$, тј. $b=a^2$ и $c=ab=a^3$. Дакле, први полином износи $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$, тј. $(x+a)^3$, а други $x^2+2ax+a^2$, тј. $(x+a)^2$.

3. Нека су у A и D прави углови тог трапеза, AB већа основица, CD мања. По услову задатка имамо $\measuredangle ACB=\measuredangle ACD=\varphi$, а одатле следи $\measuredangle CAB=\measuredangle ACD=\varphi$, као наизменични углови. Дакле, $\triangle ABC$ је једнакокрак, тј. $AB=BC=c$. Нека је O пресек средње линије трапеза са дијагоналом AC; дакле, O је средиште AC. Како је $\triangle ADC$ правоугли, то имамо $OD=OA=OC=\frac{AC}{2}=30$. Пошто је и $\triangle OCD$ једнакокрак са углом на основици φ, имамо $\triangle ABC\sim\triangle DOC$. Ако означимо $CD=x$, добијамо пропорцију $\frac{60}{c}=\frac{x}{30}$, одакле следи $cx=1800$. Даље, имамо и $c+x=AB+CD=2\cdot 43=86$, па важи $c=86-x$, и уврштавањем овога у претходну једначину добијамо $(86-x)x=1800$, тј. $x^2-86x+1800=0$. Решавањем ове једначине израчунавамо $x_{1/2}=\frac{86\pm\sqrt{86^2-4\cdot 1800}}{2}=\frac{86\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{86\pm 14}{2}$, тј. $x=36$ и $c=86-x=50$ (одбацујемо друго решење: $x=50$ и $c=36$, јер треба да важи $c>x$). Дакле, имамо $AB=BC=50$, $CD=x=36$, и из Питагорине теореме рачунамо $AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{60^2-36^2}=\sqrt{3600-1296}=\sqrt{2304}=48$.



Оп 2018 2Б 3

4. За $p=5$ имамо $4p^2+1=101$ и $6p^2+1=151$, и ови бројеви су заиста прости.
Претпоставимо сада $p\neq 5$. Тада имамо $p\equiv\pm 1\pmod 5$ или $p\equiv\pm 2\pmod 5$. У првом случају добијамо $4p^2+1\equiv 4\cdot(\pm 1)^2+1=5\equiv 0\pmod 5$, тј. број $4p^2+1$ је дељив са 5, а како је он очигледно већи од 5, мора бити сложен. У другом случају добијамо $6p^2+1\equiv 6\cdot(\pm 2)^2+1=25\equiv 0\pmod 5$, па је тада број $6p^2+1$ сложен. Дакле, једино решење је $p=5$.

5. Пре свега, имамо услов $x\neq 3$, јер лева страна није дефинисана за $x=3$.

За $x > 3$ израз $\frac{3}{|x-3|} - 1$ се своди на $\frac{3}{x-3} - 1$, што је негативно за $x - 3 > 3$, тј. $x > 6$, а ненегативно за $3 < x \leqslant 6$. За $x < 3$ израз $\frac{3}{|x-3|} - 1$ се своди на $\frac{3}{3-x} - 1$, што је негативно за $3 - x > 3$, тј. $x < 0$, а ненегативно за $0 \leqslant x < 3$. Имајући још у виду да, због израза $|x - 2|$, морамо разликовати случајеве $x \geqslant 2$ и $x < 2$, решавање делимо на следећих пет случајева:

- $x > 6$:
  Постављена неједначина се своди на $2(x-2) - (1 - \frac{3}{x-3}) \geqslant 1$, тј. $2x - 6 + \frac{3}{x-3} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{2(x-3)^2+3}{x-3} \geqslant 0$, и очигледно је испуњено увек.
- $3 < x \leqslant 6$:
  Постављена неједначина се своди на $2(x-2) - (\frac{3}{x-3} - 1) \geqslant 1$, тј. $2x - 4 - \frac{3}{x-3} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{2x^2-10x+9}{x-3} \geqslant 0$. Функција $2x^2 - 10x + 9$ има нуле у тачкама $x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-72}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$, па је ненегативна за $x \leqslant \frac{5-\sqrt{7}}{2}$ и $x \geqslant \frac{5+\sqrt{7}}{2}$. У пресеку с условом $3 < x \leqslant 6$, овде добијамо решења $x \in [\frac{5+\sqrt{7}}{2}, 6]$.
- $2 \leqslant x < 3$:
  Постављена неједначина се своди на $2(x-2) - (\frac{3}{3-x} - 1) \geqslant 1$, тј. $2x - 4 - \frac{3}{3-x} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{-2x^2+10x-15}{3-x} \geqslant 0$. Функција $-2x^2 + 10x - 15$ има негативну дискриминанту $(100 - 120 = -20 < 0)$, а како је коефицијент уз водећи члан негативан, овде нема решења.
- $0 \leqslant x < 2$:
  Постављена неједначина се своди на $2(2-x) - (\frac{3}{3-x} - 1) \geqslant 1$, тј. $4 - 2x - \frac{3}{3-x} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{2x^2-10x+9}{3-x} \geqslant 0$. Функција $2x^2 - 10x + 9$ је ненегативна (како је већ виђено) за $x \leqslant \frac{5-\sqrt{7}}{2}$ и $x \geqslant \frac{5+\sqrt{7}}{2}$. У пресеку с условом $0 \leqslant x < 2$, овде добијамо решења $x \in [0, \frac{5-\sqrt{7}}{2}]$.
- $x < 0$:
  Постављена неједначина се своди на $2(2-x) - (1 - \frac{3}{3-x}) \geqslant 1$, тј. $2 - 2x + \frac{3}{3-x} \geqslant 0$, а што се другачије може записати као $\frac{2x^2-8x+9}{3-x} \geqslant 0$, тј. $\frac{2(x-2)^2+1}{3-x} \geqslant 0$, и очигледно је испуњено увек.

Дакле, сумирајући све, решење неједначине је:

$$x \in \left(-\infty, \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{7}}{2}, \infty\right).$$

Трећи разред – Б категорија

1. Факторишимо број 2018 на просте чиниоце: $2018 = 2 \cdot 1009$. Како је израз на левој страни постављене једначине једнак $p(6+7q+8qr+9qrs)$, и како је p прост број, могуће је $p = 2$ или $p = 1009$. Други случај отпада, јер би тада израз у загради морао бити једнак 2, а он је очигледно већи од 2. Дакле, остаје $p = 2$. Тада имамо $6+7q+8qr+9qrs = 1009$, што се своди на $q(7 + 8r + 9rs) = 1003 = 17 \cdot 59$. Одавде следи $q = 17$ (немогуће је $q = 59$ јер је израз у загради већи од 17). Даље добијамо $7 + 8r + 9rs = 59$, што се своди на $r(8 + 9s) = 52 = 2^2 \cdot 13$. Одавде следи $r = 2$ (немогуће је $r = 13$ јер је израз у загради већи од 4). Коначно, преостаје $8 + 9s = 26$, што се своди на $9s = 18$, па добијамо $s = 2$.

Дакле, једино решење је: $(p, q, r, s) = (2, 17, 2, 2)$.

2. a) Да би сва три логаритма била дефинисана, морају важити услови $3^x - 1 > 0$, $9^x - 3^{x+1} + 2 > 0$ и $3 - 3^x > 0$. Прва неједначина се своди на $3^x > 1$, тј. $x > 0$; трећа неједначина се своди на $3^x < 3$, тј. $x < 1$. Да бисмо решили другу, уведимо смену $3^x = t$. Тада се друга неједначина своди на $t^2 - 3t + 2 > 0$, тј. $(t-1)(t-2) > 0$, и њено решење је $t \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$, а враћањем смене $t = 3^x$ добијамо $x \in (-\infty, 0) \cup (\log_3 2, \infty)$. Узимајући пресек сва три добијена услова за x закључујемо да су сва три логаритма дефинисана за $x \in (\log_3 2, 1)$.

b) Постављена једначина се своди на

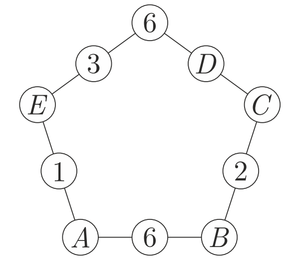
$$\log_2(3^x - 1) + \log_2(3 - 3^x) = 2\log_4(9^x - 3^{x+1} + 2),$$

тј.

$$\log_2((3^x - 1)(3 - 3^x)) = \log_{2^2}(9^x - 3^{x+1} + 2)^2.$$

Десна страна једнакости је заправо $\log_2(9^x - 3^{x+1} + 2)$, па након ослобађања од логаритама и увођења смене $t = 3^x$ преостаје још решити једначину $(t-1)(3-t) = (t-1)(t-2)$, где смо за десну страну искористили факторизацију раније добијену у делу под а). Ово се даље своди на $0 = (t-1)((t-2) - (3-t)) = (t-1)(2t-5)$, што има решења $t = 1$ и $t = \frac{5}{2}$. Прво решење даје $x = 0$, што одбацујемо јер не припада области дефинисаности. Друго решење даје $x = \log_3 \frac{5}{2}$, и ова вредност заиста испуњава добијена ограничења $(\log_3 2 < \log_3 \frac{5}{2} < 1)$, па је то и једино решење постављене једначине.

3. Означимо са A, B, C, D и E преосталих пет бројева које Марко треба да упише, као на слици.



Оп 2018 3Б 3

Како збирови на свакој страници петоугла треба да су једнаки, имамо да важи:

$$A+6+B=B+2+C=C+D+6=6+3+E=A+1+E,$$

где $A,B,C,D,E \in \{1,2,3,\ldots,99\}$. Из једнакости $6+3+E=A+1+E$ добијамо $A=8$. Из једнакости $A+6+B=B+2+C$ добијамо $C=A+4=12$. Преостаје још $B+2+C=C+D+6=6+3+E$, што се своди на $14+B=18+D=9+E$, одакле добијамо $B=D+4$ и $E=D+9$. Дакле, одабиром броја D јединствено су одређени и B и E, а из $1 \leqslant D < B < E \leqslant 99$ следи $1 \leqslant D \leqslant 90$ и било коју од ових вредности можемо одабрати за D. Дакле, Марко може попунити бројеве на 90 начина.

4. Обележимо поља уређеним паровима (i,j), $1 \leqslant i \leqslant 3$, $1 \leqslant j \leqslant 2$, где нумеришемо слева надесно и одоздо нагоре (дакле, доње лево поље има координате $(1,1)$, а горње десно $(3,2)$).

Претпоставимо прво да је Анђелија уписала слово С у поље $(2,1)$. Приметимо сада: уколико би уписала слово Р у поље $(2,2)$, и потом слово Б уписала у једно од два поља лево, тада слово И мора уписати у друго од та два поља лево, но онда остаје без могућности за слово Ј, тј. не може успешно попунити таблицу; аналогно закључујемо и ако слово Б упише у једно од два поља десно. Дакле, уколико упише слово Р у поље $(2,2)$, тада никако не може попунити таблицу до краја. Претпоставимо сада да је уписала слово Р у једно од поља $(1,1)$ или $(1,2)$ (две могућности). Тада за слово Б има избор између другог од та два поља или пак поља $(2,2)$. У другом случају примећујемо да, без обзира на то где упише слово И, не може попунити таблицу до краја. Према томе, слово Б мора уписати у преостало од поља $(1,1)$ или $(1,2)$ (једнозначно одређено), а затим и за слово И остаје слободно само поље $(2,2)$, и коначно, за слова Ј и А може бирати којим ће редоследом искористити поља $(3,1)$ и $(3,2)$ (две могућности). Дакле, закључимо, уколико упише слово Р у једно од поља $(1,1)$ или $(1,2)$, има укупно 4 начина да попуни таблицу. Аналогно, уколико упише слово Р у једно од поља $(3,1)$ или $(3,2)$, има укупно 4 начина да попуни таблицу. Све заједно, израчунали смо следеће: уколико Анђелија упише слово С у поље $(2,1)$, има укупно 8 начина да попуни таблицу.

Аналогно, уколико Анђелија упише слово С у поље $(2,2)$, има укупно 8 начина да попуни таблицу.

Претпоставимо сада да је Анђелија уписала слово С у поље $(1,1)$. Уколико слово Р упише у поље $(1,2)$, тада слово Б мора уписати у једно од два поља у средњој колони, а преостала три поља може искористити произвољним редоследом; то укупно даје $2 \cdot 3! = 12$ начина. Претпоставимо сада да је Анђелија слово Р уписала у једно од поља $(2,1)$ или $(2,2)$ (две могућности). Тада, уколико слово Б упише у друго од та два поља, примећујемо да, без обзира на то где упише слово И, не може попунити таблицу до краја. Дакле, слово Б може да упише или у поље $(1,2)$, или у једно од два поља у десној колони. У првом случају за слово И има једнозначно одређено поље у средњој колони, и коначно, за слова Ј и А може бирати којим ће редоследом искористити поља $(3,1)$ и $(3,2)$ (две могућности); у другом случају (Б у једно од два поља у десној колони – две могућности) заправо примећујемо да постоји јединствен начин да се таблица попуни до краја (редослед: преостало поље у десној колони, преостало поље у средњој колони, преостало поље у левој колони). Дакле, има укупно $2+2=4$ могућности да доврши попуњавање таблице од слова Б надаље, тј. укупно $2 \cdot 4 = 8$ могућности да попуни таблицу уколико је слово Р на једном од поља $(2,1)$ или $(2,2)$. Све заједно, израчунали смо следеће: уколико Анђелија упише слово С у поље $(1,1)$, има укупно $12+8=20$ начина да попуни таблицу.

Аналогно, уколико Анђелија упише слово С у неко од преостала три угаона поља, има 20 начина да попуни таблицу. Према томе, укупан резултат је: $2 \cdot 8 + 4 \cdot 20 = 96$ начина.

5. Свака страна тетраедра је троугао, и дужине страница сваког од тих троуглова морају испуњавати неједнакост троугла. То значи $AC+CB > AB = 41$ и $AD+DB > AB = 41$. Одатле добијамо $AC+CB+AD+DB > 82$. Ово значи да обе ивице 27 и 36 морају бити међу AC, CB, AD или DB (заиста, ако то не би било испуњено, тада би збир $AC+CB+AD+DB$ износио $7+13+18+27$ или $7+13+18+36$, тј. 65 или 74, што није веће од 82). Притом, не могу обе те ивице истовремено бити странице $\triangle ABC$ односно $\triangle ABD$, јер би тада у другом троуглу страница $AB=41$ морала бити мања од збира друге две, а тај збир би износио највише $13+18=31$, контрадикција. Дакле, у, без умањења општости, $\triangle ABC$ једна страница има дужину 27, и нека је то, поново без умањења општости, AC, а тада у $\triangle ABD$ једна страница има дужину 36. У $\triangle ABC$ мора важити $BC > AB - AC = 41 - 27 = 14$, па је једина преостала могућност $BC = 18$. Сада, уколико би важило $BD = 36$, из $\triangle BCD$ имали бисмо $CD > BD - BC = 36 - 18 = 18$, а ово је немогуће јер нема више „слободних“ ивица дужине веће од 18. Дакле, у $\triangle ABD$ не може страница BD имати дужину 36, па остаје $AD = 36$. Коначно, из $\triangle ACD$ добијамо $CD > AD - AC = 36 - 27 = 9$, па је једина преостала могућност $CD = 13$.

Четврти разред – Б категорија

1. На основу идентитета $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ можемо факторисати леву страну, и тиме нам остаје једначина

$$(2x-4)((x-7)^2 - (x-7)(x+3) + (x+3)^2) = 278(x-2).$$

Једно решење је очигледно $x_1 = 2$. Остала решења потражићемо после скраћивања обе стране са $2(x-2)$: на левој страни тада остаје $(x^2 - 14x + 49) - (x^2 - 4x - 21) + (x^2 + 6x + 9) = x^2 - 4x + 79$, а на десној остаје 139. Дакле, треба још решити квадратну једначину $x^2 - 4x - 60 = 0$, а њена решења су $x_{2/3} = \frac{4 \pm \sqrt{16+240}}{2} = \frac{4 \pm 16}{2} = 2 \pm 8$, тј. $x_2 = -6$ и $x_3 = 10$.

2. Приметимо да за $x \to 0^+$ имамо $\frac{2018}{x} \to \infty$. Како за $0 \leqslant a < 1$ израз $\frac{a+2018^x}{2}$ у околини тачке $x = 0$ узима вредности из интервала $(0,1)$, из тога и претходне реченице имамо да је тада тражени лимес једнак 0; слично, за $a > 1$ израз $\frac{a+2018^x}{2}$ у околини тачке $x = 0$ узима вредности веће од 1, па је тада тражени лимес једнак ∞. Остаје једино случај $a = 1$. Тада имамо:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1+2018^x}{2}\right)^{\frac{2018}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \left(e^{\ln\frac{1+2018^x}{2}}\right)^{\frac{2018}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{2018(\ln(1+2018^x)-\ln 2)}{x}} = e^{2018 \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2018^x)-\ln 2}{x}},$$

па преостаје још израчунати $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2018^x)-\ln 2}{x}$. Применом Лопиталовог правила добијамо

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+2018^x)-\ln 2}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+2018^x}(2018^x \ln 2018)}{1} = \frac{\ln 2018}{2}.$$

Дакле, решење задатка је:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{a+2018^x}{2}\right)^{\frac{2018}{x}} = \begin{cases} 0, & \text{за } 0 \leqslant a < 1; \\ e^{\frac{2018 \ln 2018}{2}}, & \text{за } a = 1; \\ \infty, & \text{за } a > 1. \end{cases}$$

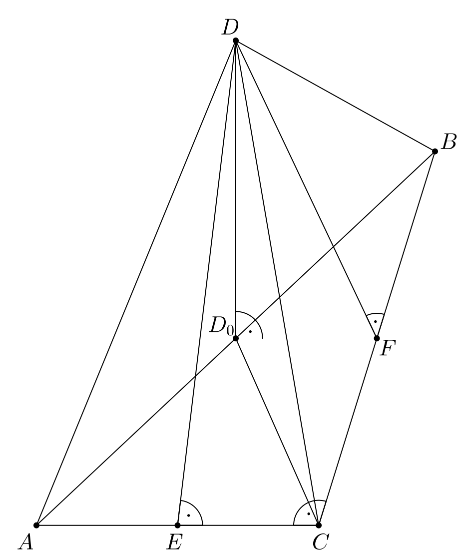
3. Претпоставимо најпре да је прва цифра непарна. Тада за две парне цифре треба одабрати две позиције од $2,3,4,5$ (гледано слева надесно), што се може учинити на $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ начина. Затим, након што смо одабрали на којим ће позицијама бити парне цифре а на којим непарне, за сваку цифру имамо избор између 5 могућности (за парне цифре између $0,2,4,6,8$, а за непарне цифре између $1,3,5,7,9$). То даје $5^5 = 3125$ бројева за сваку од могућности с фиксираним позицијама парних цифара, тј. $6 \cdot 3125 = 18750$ бројева укупно у случају када је прва цифра непарна.

Претпоставимо сада да је прва цифра парна. Тада за преосталу парну цифру треба одабрати једну од позиција $2,3,4,5$, што се може учинити на 4 начина. Затим, након што смо то одабрали, за прву цифру имамо избор између 4 могућности ($2,4,6,8$, тј. прва цифра не може бити 0), а за све остале цифре између 5 могућности. То даје $4 \cdot 5^4 = 2500$ бројева за сваку од могућности с фиксираном позицијом друге парне цифре, тј. $4 \cdot 2500 = 10000$ бројева укупно у случају када је прва цифра парна.

Према томе, укупно постоји $18750 + 10000 = 28750$ таквих бројева.

4. Нека је $\triangle ABC$ основа те пирамиде, $\measuredangle A = 60°$, $\measuredangle C = 90°$, и нека је D четврто теме пирамиде. Нека је D_0 подножје нормале из темена D на раван основе. Тада су праве AD_0, BD_0, CD_0 ортогоналне пројекције правих AD, BD, CD, редом, па су $\measuredangle DAD_0$, $\measuredangle DBD_0$ и $\measuredangle DCD_0$ управо углови које ивице AD, BD и CD граде с основом пирамиде, и по услову задатка, сви ови углови износе по $45°$. Одатле су $\triangle ADD_0$, $\triangle BDD_0$ и $\triangle CDD_0$ једнакокрако-правоугли троуглови и притом међусобно подударни (јер имају заједничку катету DD_0). Дакле, важи $AD_0 = BD_0 = CD_0 = DD_0 = 2018\frac{\sqrt{2}}{2} = 1009\sqrt{2}$. Уједно, из $AD_0 = BD_0 = CD_0$ добијамо да се D_0 налази управо на средини хипотенузе AB. Даље можемо израчунати $AB = AD_0 + BD_0 = 2018\sqrt{2}$, $AC = \frac{AB}{2} = 1009\sqrt{2}$ и $BC = AC\sqrt{3} = 1009\sqrt{6}$. Одатле се лако израчунава запремина посматране пирамиде:

$$V = \frac{1}{3}P(\triangle ABC)DD_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1009\sqrt{2} \cdot 1009\sqrt{6}}{2} \cdot 1009\sqrt{2} = \frac{1009^3\sqrt{6}}{3}.$$



Оп 2018 4Б 4

Како је D_0 на средини AB, следи да је DD_0 уједно и висина на AB у $\triangle ABD$. Нека су E и F подножја нормала из D на AC и BC у $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$, редом.

Како су ови троуглови једнакокраки с основицама AC и BC, из Питагорине теореме рачунамо

$$DE = \sqrt{DC^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{2018^2 - \frac{1009^2}{2}} = 1009\sqrt{\frac{7}{2}}$$

и

$$DF = \sqrt{DC^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \sqrt{2018^2 - \frac{3 \cdot 1009^2}{2}} = 1009\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

Дакле, површина пирамиде износи:

$$\begin{aligned}
P &= P(\triangle ABC) + P(\triangle ABD) + P(\triangle ACD) + P(\triangle BCD) \\
&= \frac{1009\sqrt{2} \cdot 1009\sqrt{6}}{2} + \frac{2018\sqrt{2} \cdot 1009\sqrt{2}}{2} + \frac{1009\sqrt{2} \cdot 1009\sqrt{\frac{7}{2}}}{2} + \frac{1009\sqrt{6} \cdot 1009\sqrt{\frac{5}{2}}}{2} \\
&= 1009^2\left(\sqrt{3} + 2 + \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}\right).
\end{aligned}$$

5. Приметимо:

$$1000\left(\frac{m}{n}\right)^3 = \overline{xyz{,}xyzxyzxyz\dots} = \overline{xyz} + \overline{0{,}xyzxyzxyz\dots} = \overline{xyz} + \left(\frac{m}{n}\right)^3,$$

па добијамо $999(\frac{m}{n})^3 = \overline{xyz}$, тј. $999m^3 = \overline{xyz} \cdot n^3$. Јасно, можемо претпоставити да су m и n узајамно прости. Одатле следи $n^3 \mid 999 = 3^3 \cdot 37$. Како важи $n > 1$ (због $m < n$), једина могућност је $n = 3$. Тада може бити $m = 1$ или $m = 2$. У првом случају добијамо $\overline{xyz} = \frac{999}{27} = 37 = \overline{037}$, а у другом $\overline{xyz} = \frac{999 \cdot 8}{27} = 296$. Дакле, обе могућности за m заиста дају решења задатка, па следи да $\frac{m}{n}$ може бити $\frac{1}{3}$ или $\frac{2}{3}$.